

1.2

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Έστω μία συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C_f .

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός λ , τότε :

Ονομάζουμε **εφαπτομένη της C_f στο A** , την ευθεία που διέρχεται από το A και της οποίας ο **συντελεστής διεύθυνσης λ** είναι ίσος με το παραπάνω όριο λ .

2.

Έστω ότι ένα σώμα κινείται πάνω σ' έναν άξονα και η **τετμημένη του S** , την χρονική στιγμή t , δίνεται από την συνάρτηση $S = S(t)$. Τότε

- Ονομάζουμε **μέση ταχύτητα** του σώματος μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και $t_0 + h$ και συμβολίζουμε με $\bar{v}$, το πηλίκο

$$\bar{v} = \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

- Ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα ή απλά ταχύτητα** του σώματος την **χρονική στιγμή t_0** και συμβολίζουμε με $v(t_0)$ το όριο

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

3.

Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A και $x_0 \in A$.

Θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη στο x_0** , αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το παραπάνω όριο το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$ και το λέμε **παράγωγο της f στο x_0** . Δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

4.

Έστω δύο μεγέθη x και y , τα οποία συνδέονται με μία σχέση της μορφής $y = f(x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 .

Τότε, ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του y ως προς x στο x_0 , την παράγωγο $f'(x_0)$

Έτσι λοιπόν

- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης της C_f στο σημείο x_0 είναι ίσος με τον **ρυθμό μεταβολής** της f στο x_0 , δηλαδή με το $f'(x_0)$
- Η **ταχύτητα** $v(t_0)$ του σώματος, την χρονική στιγμή t_0 , είναι ίση με $S'(t_0)$
- Η **επιτάχυνση** $a(t_0)$ του σώματος, την χρονική στιγμή t_0 , είναι ίση με $v'(t_0)$.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κάποια σημεία.

Π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ **δεν παραγωγίζεται** στο $x_0 = 0$

2.

Για την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σ' ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα χρησιμοποιούμε τον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

3.

Όταν μας ζητάνε το **ρυθμό μεταβολής** σε σημείο x_0 , βρίσκουμε την **παράγωγο** στο x_0 .

4.

Όταν μας ζητάνε τη **στιγμιαία ταχύτητα** κατά τη χρονική στιγμή t_0 , βρίσκουμε την **παράγωγο** στο t_0 .

5.

Όταν μας ζητάνε τη **μέση ταχύτητα** μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1, t_2 ,

χρησιμοποιούμε τον τύπο
$$\bar{v} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = -2x + 1$ στο $x_0 = 1$

Λύση

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(1+h) + 1 - [-2 \cdot 1 + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - 2h + 1 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2) = -2 \end{aligned}$$

2.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $x_0 = -1$

Λύση

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1}{(-1)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - (-1+h)^2}{(-1+h)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 1 + 2h - h^2}{(-1+h)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2-h)}{h(-1+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)}{(-1+h)^2} = \frac{(2-0)}{(-1+0)^2} = 2 \end{aligned}$$

3.

Ένα σώμα κινείται σ' έναν άξονα και η θέση του την χρονική στιγμή t δίνεται από την τύπο $S(t) = 2t^2 - 3t$, όπου ο χρόνος t μετράται σε sec και η απόσταση σε m.

i) Να βρείτε την μέση ταχύτητα του σώματος μεταξύ των χρονικών στιγμών

$$t_1 = 2 \text{ και } t_2 = 5.$$

ii) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή $t_0 = 3$

Λύση

i)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(5) - S(2)}{5 - 2} = \\ &= \frac{(2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5) - (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2)}{5 - 2} \\ &= \frac{(50 - 15) - (8 - 6)}{3} = \frac{35 - 2}{3} = 11 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

Σχόλιο 5

ii)

$$\begin{aligned} v(3) &= S'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(3+h) - S(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 3(3+h) - [2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(9 + 6h + h^2) - 9 - 3h - [18 - 9]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{18 + 12h + 2h^2 - 9 - 3h - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 9h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 9)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 9) = 2 \cdot 0 + 9 = 9 \end{aligned}$$

Σχόλιο 4

4.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2$ στο σημείο $A(3, f(3))$

Λύση

Για την εξίσωση της εφαπτομένης χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Σχόλιο 2

$$f(x_0) = f(3) = 3^2 - 2 = 7$$

$$f'(x_0) = f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Θεωρία 3

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 2 - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 2 - 7}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6 + 0 = 6$$

$$\text{Η (1) γίνεται } y - 7 = 6(x - 3) \Leftrightarrow y = 6x - 18 + 7 \Leftrightarrow y = 6x - 11$$

5.

Το κόστος παραγωγής σε Ευρώ x μονάδων προϊόντος μίας επιχείρησης δίνεται από την συνάρτηση $K(x) = 0,01x^2 + 2x + 2600$

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του κόστους όταν $x = 10$

Λύση

Αναζητάμε την $K'(10)$

Σχόλιο 3

$$K'(10) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K(10+h) - K(10)}{h} =$$

Θεωρία 3

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,01(10+h)^2 + 2(10+h) + 2600 - 2621}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,01(100 + 20h + h^2) + 2(10+h) + 2600 - [0,01 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2600]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 0,2h + 0,01h^2 + 20 + 2h + 2600 - [1 + 20 + 2600]}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2,2h + 0,01h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2,2 + 0,01h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2,2 + 0,01h) = 2,2 + 0 = 2,2$$

6.

Σ' ένα ορθογώνιο με μήκος x και πλάτος y , η περίμετρος είναι σταθερή και ίση με 100. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν το μήκος x είναι $x = 20$

Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$E = x \cdot y$$

Επειδή η περίμετρος είναι 100, θα έχουμε $2x + 2y = 100$

$$x + y = 50 \Leftrightarrow y = 50 - x$$

Οπότε

$$E(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x$$

Αναζητάμε τον $E'(20)$

$$E'(20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(20 + h) - E(20)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(20 + h)^2 + 50(20 + h) - [-20^2 + 50 \cdot 20]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(400 + 40h + h^2) + 1000 + 50h - [-400 + 1000]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-400 - 40h - h^2 + 1000 + 50h - 600}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 10h}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-h + 10)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 10) = -0 + 10 = 10$$

Σχόλιο 3